

Błędy w metodzie "Newtona"

Niech $f'(\alpha) \neq 0$ czyli funkcja nie jest styczna do osi OX (w rozwiązaniu).

Rozwińmy $f(x)$ w szereg Taylora wokół α .

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n) \quad (1)$$

$$c_n \in (\alpha, x_n).$$

Przepiszmy (1) w postaci

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Z M.N.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

Więc

$$0 = \cancel{x_n} - x_{n+1} + \alpha - \cancel{x_n} + \dots$$

Czyli

$$\alpha - x_{n+1} = \left[\frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right] (\alpha - x_n)^2$$

Więc błąd w $n+1$ kroku jest proporcjonalny do błędu w kwadracie $\sim n$ -tym kroku